Elementos de Probabilidade e Estatística Aplicados a Análise de Confiabilidade e Risco

1. Introdução

- Existem duas metodologias básicas para a modelagem da incerteza através do uso de probabilidade:
  - Espaço Amostral e Eventos:
    - É o método mais básico o qual usa conceitos de espaço amostral e eventos definidos neste espaço amostral
    - Probabilidades destes eventos são definidas e então são computadas probabilidades de eventos mais complexos formados a partir da interseção e união de eventos elementares
  - Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade:
    - Basea-se nos conceitos de variáveis aleatórias e distribuições de probabilidade associadas à estas variáveis
    - Variável aleatória é uma variável que pode assumir certos valores com determinadas probabilidades associadas a estes possíveis valores
    - Especificando a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória, o processo aleatório fica completamente caracterizado
- Ambos os métodos são utilizados em confiabilidade. Por exemplo:
  - Pode-se definir um evento como a falha de um equipamento
  - Pode-se definir uma variável aleatória como o tempo até falhar do mesmo equipamento

2. Eventos Aleatórios

- Considere a seguinte situação:
  - Nós queremos observar a “partida de uma bomba”
  - Suponhamos que na partida, a nossa bomba somente possa “funcionar” ou “falhar”
    - Tem-se que a “partida de uma bomba” é um *experimento*, onde os possíveis resultados “funcionar” e “falhar” compõem o *espaço amostral* deste experimento
  - Agora, considere que nós estamos interessados mais especificamente na

"falha da bomba na partida". Note que "falha da bomba na partida" é um subconjunto do experimento "partida da bomba"

- Tem-se que "falha da bomba na partida" é um *evento*
- Este evento possui como único resultado favorável dentre os possíveis no espaço amostral o elemento "falhar"

- Assim, os elementos que compõem um conjunto são considerados como os possíveis resultados de um experimento
- *Conjunto Universo* (*S*) é uma coleção de todos os possíveis elementos em um experimento
- *Espaço Amostral* é este conjunto de todos os possíveis resultados (elementos) de um experimento
- Os elementos do espaço amostral são mutuamente exclusivos:
  - Dois elementos quaisquer do espaço amostral não podem ocorrer ao mesmo tempo
  - Por exemplo, no caso da partida da bomba, a mesma não pode funcionar e falhar simultaneamente!
- *Evento Aleatório* (ou simplesmente evento) é a combinação de vários elementos do espaço amostral
- Exemplo 1:
  - Experimento: "jogar um dado"
  - Espaço amostral: {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  - Evento: "obter um número ímpar ao jogar um dado"
  - Este evento representa um subconjunto do espaço amostral com elementos {1, 3, 5}
- Exemplo 2:
  - Experimento: "partida de uma bomba"
  - Espaço amostral: {Funiona, Falha}
  - Evento: "falha da bomba na partida"
- A cada evento aleatório *E* está associada uma probabilidade *P(E)* de ocorrência deste evento:

$$P(E) = \frac{N_E}{N}$$

onde,

N_E é o número de elementos no conjunto *E*, ou seja, o número de resultados favoráveis ao evento *E*

N é o número de elementos em *S*, ou seja, todos os resultados possíveis

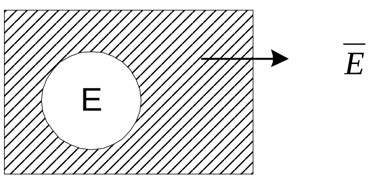
- Exemplo 3:
  - Evento *E*: “obter ímpar ao jogar um dado”
  - $N_E = 3$ e $N = 6$, logo $P(E) = 3/6 = 0.5$
- N_E também pode ser interpretado como o número de vezes que um evento *E* é observado:
  - Evento *E*: “falha da bomba na partida”
  - $N = 2000$, ou seja, observaram-se 2000 tentativas de partir a bomba
  - $N_E = 20$, ou seja, a bomba falhou 20 vezes
  - $P(E) = 20/2000 = 0.01$

3. Axiomas da Probabilidade

- Dado em espaço amostral *S* e um evento *E*:
  - $0 \leq P(E) \leq 1$, para cada evento $E \subset S$. Assim:
    - $P(E) = 0 \Rightarrow$ evento impossível (*E* nunca ocorre)
    - $P(E) = 1 \Rightarrow$ evento com absoluta certeza de ocorrer (*E* sempre ocorre)
    - Por exemplo, se *E* é a falha da bomba na partida, então quanto mais próximo de 1 é o valor de *P(E)*, mais provável é que a bomba venha a falhar na partida.
  - $P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n)$, onde os eventos $E_1, E_2, \cdots, E_n$ são mutuamente exclusivos (disjuntos), ou seja, dois eventos E_i, E_j quaisquer não ocorrem ao mesmo tempo
  - $P(S) = 1$

4. Cáculo da Probabilidade

- Complemento de um Evento:
  - Todo evento E possui o seu complemento $\overline{E}$



- Por exemplo, se E é o evento "falha da bomba na partida" como definido anteriormente, então $\overline{E}$ é o evento "bomba não falha na partida"
- Como

$$P(S) = 1$$

e

$$S = E \cup \overline{E}$$

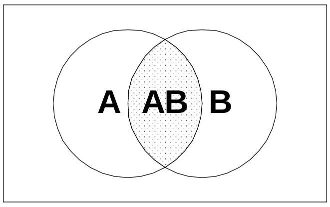
então

$$P(S) = P(E \cup \overline{E}) = 1$$

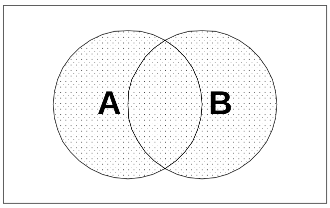
logo

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

- Interseção de dois Eventos *A* e *B*:
  - É o evento que consiste do elementos comuns a ambos *A* e *B*
  - É a ocorrência simultânea dos eventos *A* e *B* (veja a seguinte figura)



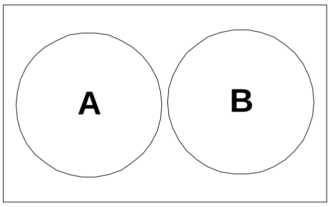
- União de dois Eventos *A* e *B*:
  - É o evento que consiste dos elementos em *A*, *B*, e comuns a os dois eventos
  - É a ocorrência de um evento, ou do outro, ou de ambos eventos simultaneamente (veja a seguinte figura)



- Exemplo 4:
  - *A* = falha da bomba
  - *B* = falha da válvula
  - Então
    - $A \cap B$ é o evento que ambos a bomba e a válvula falhem

- $\overline{A} \cap B$ é o evento que a bomba não falhe e que a válvula falhe
- $\overline{A} \cup B$ é o evento que a bomba não falhe ou que a válvula falhe

- Eventos Mutuamente Exclusivos:
  - Dois eventos *A* e *B* são mutuamente exclusivos se a ocorrência de um impede a ocorrência do outro evento
  - Os eventos não podem ocorrer simultaneamente (veja a seguinte figura)



  - Por exemplo:
    - $A, \overline{A}$ são mutuamente exclusivos
    - Um equipamento não pode falhar e não falhar ao mesmo tempo
  - Se *A* e *B* são mutuamente exclusivos, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$$

onde $\varnothing$ é o conjunto vazio, ou seja, o evento impossível: $P(\varnothing) = 0$

- Eventos Independentes:
  - Dois eventos *A* e *B* são independentes se a ocorrência ou não de um deles não depende ou não altera a probabilidade de ocorrência do outro evento
  - Logo

$$P(A|B) = P(A)$$

onde

$P(A|B)$ é a probabilidade condicional, ou seja, a probabilidade de *A* dado que o evento *B* já ocorreu

  - Então, para dois eventos *A* e *B* são independentes:

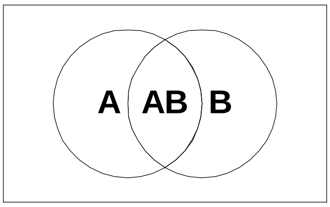
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

ou seja, a probabilidade de ocorrência simultânea de *A* e *B* é multiplicação de suas probabilidades uma vez que não há interferência mútua.

- <u>Eventos Dependentes</u>:
  - Quando dois eventos A e B são dependentes, a probabilidade de ocorrência ou não de um deles é alterada pela ocorrência ou não do outro evento:

$$P(A|B) \neq P(A)$$

  - Considere o diagrama a seguir:



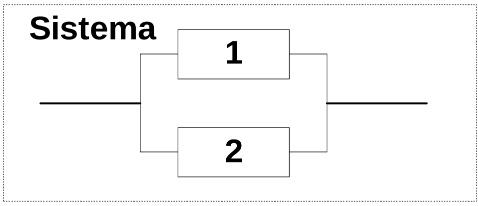
    - Note que uma vez obtida a informação de que o evento B já ocorreu, a probabilidade de ocorrência de qualquer evento que não inclua B é zero
    - Ou seja, o espaço amostral resultante fica agora reduzido aquele correspondente ao evento B.
  - Logo, a probabilidade condicional é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

  - E a probabilidade de ocorrência simultânea de A e B (interseção) é:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

  - Assim:
    - A probabilidade condicional $P(A|B)$ pode ser interpretada como um espaço amostral reduzido no qual o evento B define o conjunto de todas as possíveis ocorrências (i.e., o espaço amostral reduzido) e a interseção $A \cap B$ representa os eventos em B que também estão em A
    - $P(A|B)$ representa a percentagem de eventos de B que também estão em A
- Exemplo 5:
  - Quando dois componentes estão operando em paralelo, ambos devem falhar para implicar em falha do sistema. Veja a seguinte figura.



- Considere dois componentes idênticos operando em paralelo os quais dividem uma certa carga operacional. Se um dos componentes falha, a probabilidade de falha do outro componente aumenta como conseqüência do aumento do estress (carga operacional) sobre ele imposto.
- Assim, sejam
  A o evento que componente 1 falha
  B o evento que componente 2 falha
  onde

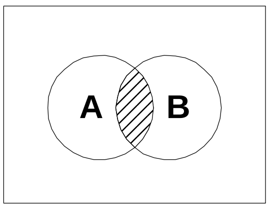
$$P(A) = P(B) = 0.05$$

$$P(A|B) = P(B|A) = 0.10$$

  Então, a probabilidade de falha do sistema, ou seja, a probabilidade que ambos os componentes falhem é:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.10x0.05$$
$$P(A \cap B) = 0.005 \textit{ ou seja } 0.5\%$$

- Exemplo 6 (Resolver):
  - Um sistema em paralelo de dois componentes está em estado falho 3% do tempo. Componente 1 está em estado falho 8% do tempo, e componente 2 está em estado falho 6% do tempo. Quais são as probabilidades de falha do componente 1 uma vez que o componente 2 já falhou, e do componente 2 dado que o componente 1 falhou ?
- <u>Probabilidade da União de Dois Eventos</u>:
  - Observe a seguinte figura representando a união de dois eventos *A* e *B*



  - Uma vez que *A* e *B* não são mutuamente exclusivos, tem-se que $P(A)$ e $P(B)$ ambos incluem $P(A \cap B)$. Logo, $P(A \cap B)$ deve ser excluída uma vez, ou seja,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Se A e B são dependentes, então $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$. Logo

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A|B)P(B)$$

- Se A e B são independentes, então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

- Se A e B são mutuamente exclusivos, $P(A \cap B) = 0$, logo

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Exemplo 7:
  - Dados os eventos A e B do exemplo 5, tem-se:
    - Probabilidade de que pelo menos um dos componentes falhe:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = 0.05 + 0.05 - 0.005$$
$$P(A \cup B) = 0.095$$

    - Probabilidade de que nenhum componente falhe:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.095$$
$$P(\overline{A \cup B}) = 0.905$$

    - Probabilidade de que pelo menos um componente funcione, ou seja, a confiabilidade do sistema (os componentes estão em paralelo) é dada por:

$$P(A \cap B) \equiv \textit{probabilidade de que ambos falhem}$$
$$P(\overline{A \cap B}) \equiv \textit{probabilidade de que pelo menos um nao falhe}$$
$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.005$$
$$P(\overline{A \cap B}) = R_S = 0.995 \textit{ ou seja } 99.5\%$$

- <u>Eventos Independentes versus Eventos Mutuamente Exclusivos</u>:
  - Deve-se enfatizar a diferença entre estes dois conceitos uma vez que os mesmos são muitas vezes confundidos
  - Dois eventos mutuamente exclusivos não são independentes:
    - De fato, se A e B são mutuamente exclusivos, então

$A \cap B = \varnothing$. Logo,

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0$$

- Isto implica em $P(B|A) = 0$ pois $P(A) \neq 0$

- Se A e B são independentes, então $P(B|A) = P(B) \neq 0$
- Assim, dois eventos A e B mutuamente exclusivos são dependentes.

5. Teorema de Bayes

- Resulta diretamente do conceito de probabilidade condicional
- Sejam dois eventos dependentes A e E. Então,

$$P(A \cap E) = P(A)P(E|A)$$

e analogamente

$$P(A \cap E) = P(E)P(A|E)$$

consequentemente

$$P(E)P(A|E) = P(A)P(E|A)$$

Resolvendo para $P(A|E)$, tem-se

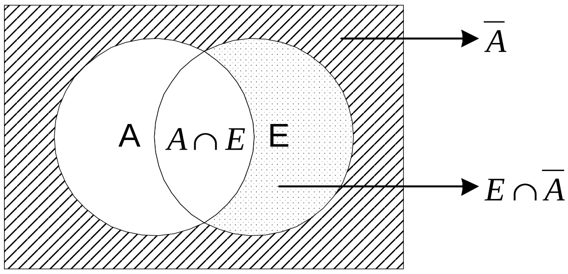
$$P(A|E) = \frac{P(A)P(E|A)}{P(E)}$$

o qual é o *Teorema de Bayes*

- Cada termo presente no teorema de Bayes tem o seguinte significado:
  - $P(A)$ é chamada de *probabilidade a priori* de A, ou seja, a probabilidade de ocorrência do evento A antes de observarmos a ocorrência do evento E (evidência, informação adicional sobre o evento A)
  - $P(E|A)/P(E)$ é o fator pelo qual a probabilidade a priori $P(A)$ é atualizada (revisada) com base na observação e obtenção da informação (evidência) adicional representada por E
  - $P(A|E)$ é a *probabilidade a posteriori* de A. É a probabilidade atualizada do evento A uma vez que temos conhecimento da ocorrência do evento E, ou seja, após termos obtido a informação adicional

na forma de E.

- Assim, a probabilidade a priori $P(A)$ é revisada e alterada resultando em $P(A|E)$ após termos observado/incorporado a informação adicional E sobre A
- Oberve a seguinte figura



- Note que $P(E)$ pode ser escrita como $E = (E \cap A) \cup (E \cap \overline{A})$
- Logo

$$P(E) = P[(E \cap A) \cup (E \cap \overline{A})]$$

como $(E \cap A)$ e $(E \cap \overline{A})$ são mutuamente exclusivos,

$$P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap \overline{A})$$

Também,

$$P(E \cap A) = P(A)P(E|A)$$
$$P(E \cap \overline{A}) = P(\overline{A})P(E|\overline{A})$$

Assim,

$$P(E) = P(A)P(E|A) + P(\overline{A})P(E|\overline{A})$$

- Logo, o teorema de Bayes fica:

$$P(A|E) = \frac{P(A)P(E|A)}{P(A)P(E|A) + P(\overline{A})P(E|\overline{A})}$$

- Exemplo 8:
  - Um juiz está 65% certo que o suspeito tenha cometido o crime do qual é acusado. Durante o julgamento, uma testemunha convence o juiz de que a chance de o suspeito ser canhoto é de 85%. Se 23% da população é canhota e o suspeito é também canhoto, com esta nova informação, o quão certo deve estar o juiz da culpa do suspeito?
  - Sejam:

- $C \equiv$ evento que o suspeito é culpado
- $\overline{C} \equiv$ evento que o suspeito é inocente
- $E \equiv$ evento que o suspeito é canhoto

▪ Nós queremos $P(C|E)$, ou seja, a probabilidade de que o suspeito é culpado uma vez que temos a nova informação de que o mesmo é canhoto

▪ Então,

$$P(C|E) = \frac{P(C)P(E|C)}{P(C)P(E|C) + P(\overline{C})P(E|\overline{C})}$$

onde

$P(C) = 0.65$

$P(E|C) = 0.85$

$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 0.35$ pois um suspeito só pode ser culpado ou inocente

$P(E|\overline{C}) = 0.23$ pois a população canhota é inocente

Logo

$$P(C|E) = \frac{0.65x0.85}{0.65x0.85 + 0.35x0.23} = 0.87$$

▪ O juiz agora está 87% certo de que o suspeito é culpado. Ou seja, o juiz tem mais certeza de que o suspeito é culpado depois de ter obtido a nova informação de que realmente o suspeito é canhoto.

- Exemplo 9:

▪ Considere que nós estamos interessados com o nível de confiabilidade de um novo equipamento o qual ainda não tem sido testado. O projestista (ou grupo) encarregado considera que o novo equipamento pode atingir dois níveis distintos de confiabilidade denotados por R_1 e R_2. Baseando-nos na nossa própria experiência, nós acreditamos que o equipamento pode ter nível de confiabilidade $R_1 = 0.95$, mas se o projetista estimou inapropriadamente um determinado fator crítico, então nós acreditados que o equipamento somente poderá atingir um nível mais baixo de confiabilidade, ou seja, $R_2 = 0.75$. Assim, nós vamos expressar a nossa confiaça no projetista do equipamento considerando que existe 80% de chance de que o nível R_1 seja atingido, e 20% de chance de que o nível R_2 seja atingido pelo equipamento. Agora, suponhamos que uma unidade deste equipamento seja testada e a mesma operou com sucesso. Nós gostaríamos de saber a probabilidade de que o nível de confiabilidade R_1 tenha sido atingido uma vez que obtivemos sucesso no primeiro teste do equipamento.

- Sejam
  - R_1 evento que o nível de confiabilidade R_1 seja atingido
  - S_i evento que o *i*-ésimo sistema testado resultou em sucesso
- Nós queremos $P(R_1|S_1)$:

$$P(R_1|S_1) = \frac{P(R_1)P(S_1|R_1)}{P(R_1)P(S_1|R_1) + P(R_2)P(S_1|R_2)}$$

onde

$$P(R_1) = 0.80$$

$$P(S_1|R_1) = 0.95$$

$$P(R_2) = .20$$

$$P(S_1|R_2) = 0.75$$

logo

$$P(R_1|S_1) = \frac{0.80x0.95}{0.80x0.95 + 0.20x0.75} = 0.835$$

- Ou seja, nós estamos mais certos de que o nível de confiabilidade R_1 será atingido após sabermos que uma unidades foi testada com sucesso
- Agora, consideremos que uma segunda unidade deste equipamento foi testada e também resultou em sucesso. Agora temos:

$$P(R_1|S_1 \cap S_2) = \frac{P(R_1)P(S_1 \cap S_2|R_1)}{P(R_1)P(S_1 \cap S_2|R_1) + P(R_2)P(S_1 \cap S_2|R_2)}$$

O qual resulta em

$$P(R_1(S_1 \cap S_2) = \frac{0.80(0.95x0.95)}{0.80(0.95x0.95) + 0.20(0.75x0.75)} = 0.865$$

- Estamos ainda mais certos que realmente o equipamento irá atingir um nível de confiabilidade R_1
- Assim, a probabilidade do evento R_1 é atualizada à medida que nova informação se torna disponível

6. Variáveis Aleatórias

- Considere as seguintes situações:
  - Ao lançar dois dados, sabemos que a soma X dos dois números obtidos deve ser um inteiro entre 2 e 12, porém não podemos predizer com certeza qual valor de X será obtido. No popular, diz-se que cada valor possível de X tem uma "chance" de ocorrer
  - Da mesma forma, ao selecionar uma lâmpada fluorescente a partir de uma linha de produção nós não podemos predizer exatamente qual será a sua vida útil X, ou seja, quanto tempo a lâmpada irá operar antes de falhar
- *Variável Aleatória* é uma variável que pode assumir valores de acordo com determinadas probabilidades associadas a estes possíveis valores
- Estas probabilidades formam a *Distribuição de Probabilidade* da variável aleatória X. Cada valor de X, ou um intervalo de valores de X, está associado a uma probabilidade
- Notação:
  - Letras maiúsculas (X, Y, T) são usadas para representar uma variável aleatória (v.a.)
  - Letra minúsculas são usadas para expressar os valores que a v.a. pode assumir
  - Por exemplo, se X é o número de vezes que um produto sai de especificação durante um determinado período de tempo t, então x_i representa o número observado de vezes que o produto saiu de especificação
- Tipos de Variáveis Aleatórias:
  - Discretas:
    - Quando os valores (possíveis resultados) que podem ser assumidos pela v.a. são contáveis
    - Ocorrem em experimentos nos quais nós contamos
    - Exemplos:
      - Número de carros em uma rua

- Número de mortes por câncer
- Falhas na partida de uma bomba

- Contínuas:
  - Quando a v.a. pode assumir valores contínuos
  - Ocorre em experimentos nos quais nós medimos
  - Exemplos:
    - Voltagem elétrica
    - Pressão sanguinea
    - Tempo de reparo de uma bomba
  - Ou seja, uma v.a. contínua assume valores a partir de um intervalo ao contrário de assumir valores específicos contáveis como em uma v.a. discreta

7. Variáveis Aleatórias Discretas

- Uma variável aleatória X é discreta se X pode assumir valores em um conjunto finito contável $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ou em um conjunto infinito contável $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ com probabilidades $p_1, p_2, \ldots$ respectivamente
- *Distribuição de Probabilidade* ou *Função Mássica de Probabilidade (PMF - Probability Mass Function)* de uma v.a. discreta:
  - É denotada por $P(x_i)$ onde x_i é um dos possíveis valores de X
  - A distribuição de probabilidade $P(x_i)$ é tal que

$$P(x_i) \geq 0 \; ; i = 1,2,\ldots,k$$

onde k é finito ou infinito.

  - $P(x_i)$ é definida por:

$$P(x_i) = \begin{cases} p_i \;\; se \;\; X = x_i \;\; ; i = 1,2,\ldots,k \\ 0 \;\; caso \;\; contrario \end{cases}$$

e

$$\sum_{i=1}^{k} P(x_i) = 1$$

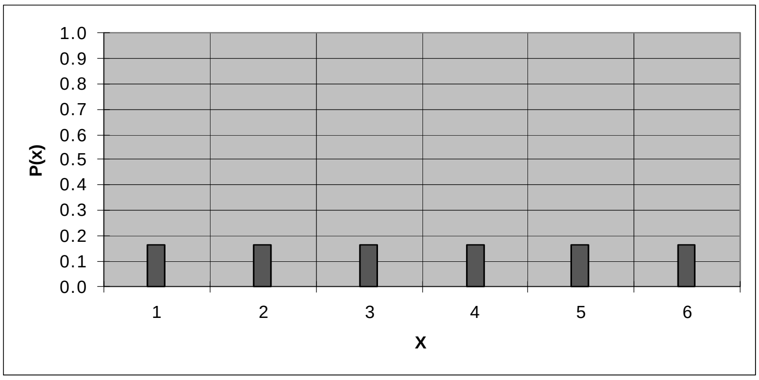
  - Logo, $P(x_i)$ associa uma probabilidade p_i a cada $X=x_i$ da v.a. discreta X

- *Função de Distribuição Acumulada (CDF -Cumulative Distribution Function) - F(x)*:
  - Fornece a probabilidade acumulada, ou seja,

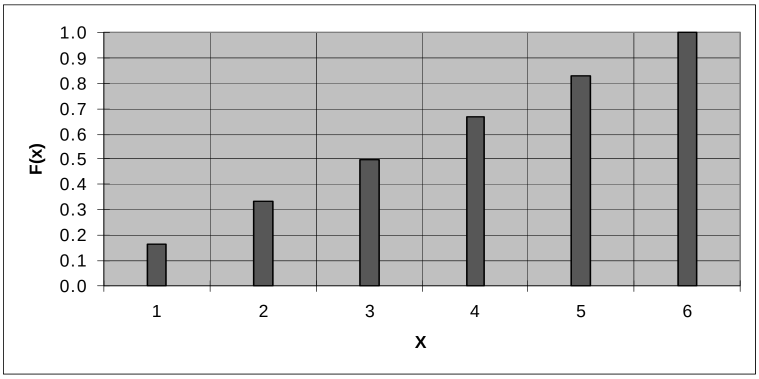
$$F(x_i) = P(X \le x_i) = \sum_{x_j \le x_i} P(x_i) = \sum_{x_j \le x_i} p_j$$

  - Logo, a CDF *F(x)* para um dado valor de $X=x$ fornece a soma das probabilidades de todos os $x_j \le x$

- Exemplo 10:
  - Ao jogar um dado temos 6 possibilidades: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$
  - Se X é o número resultante ao jogar o dado, temos que cada valor possível x_i tem uma probabilidade associada de $p_i = 1/6$
  - A distribuição de probabilidade $P(x)$ é:



  - A função de distribuição acumulada *F(x)* é:



- Pode-se ver que a função de distribuição acumulada *F(x)* tem as seguintes propriedades:
  - Monotônica crescente
  - $0 \leq F(x) \leq 1$
  - $F(0) = 0$ e $F(\infty) = 1$
- Probabilidade Associada a Intervalos:
  - Em muitas aplicações é útil e necessário saber qual é a probabilidade $P(a \leq x \leq b)$ associada ao intervalo $a \leq x \leq b$
  - Em geral, tem-se:

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

    o qual é válido para qualquer variável aleatória discreta ou contínua
  - Quando a v.a. *X* é discreta:

$$P(a \leq x \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = \sum_{a < x_j < b} p_j$$

    o qual é a soma de todas as probabilidade p_j para os quais $X = x_j$ satisfaz $a \leq x_j \leq b$

8. Variáveis Aleatórias Contínuas

- Uma variável aleatória contínua tem probabilidade zero de assumir <u>exatamente</u> um dos seus possíveis valores
  - Por exemplo, se *T* é a v.a. representando um intervalo de tempo no qual um operador realiza uma determinada ação de emergência, então a probabilidade de que o operador irá realizar esta ação de emergência em exatamente 2 minutos é zero
  - Nesta situação, utiliza-se a probabilidade associada com um <u>intervalo de valores</u> que podem ser assumidos pela v.a.
  - Por exemplo, pode-se determinar $P(t_1 \leq T \leq t_2)$, i.e., a probabilidade de que o operador realizará a ação de emergência em algum instante entre $t_1 = 1$ minuto e $t_2 = 2$ minutos
  - Assim utilizamos a função de distribuição de probabilidade acumulada (CDF), i.e., a probabilidade que a v.a. assume um valor menor ou igual do que um dado valor superior

- *Função de Distribuição Acumulada (CDF)* de uma v.a.contínua *T* ($0 \leq T < \infty$), como o tempo de falha ou o tempo de reparo, $F(t) = P(T \leq t)$ é dada por:

$$F(t) = \int_0^t f(v)dv$$

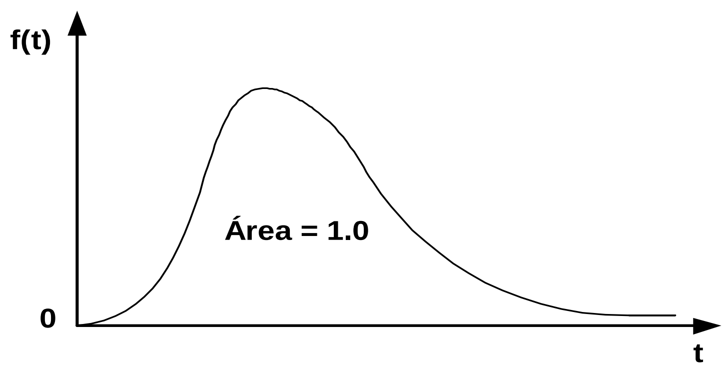
onde $f(t)$ é a função de densidade de probabilidade

- *Função de Densidade de Probabilidade (PDF - Probability Density Function)*:
  - Associa uma probabilidade para cada intervalo de valores de uma variável aleatória contínua *T*
  - É definida como:

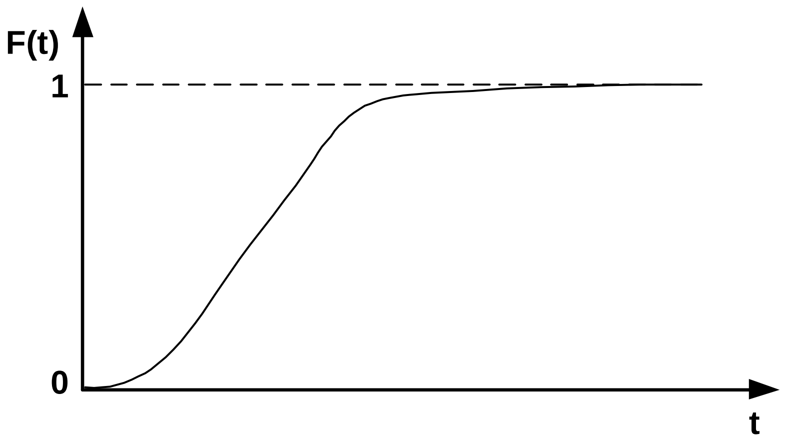
$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

onde $f(t)dt$ é a probabilidade associada a um pequeno (infinitesimal) intervalo dt de valores da v.a. contínua *T*

  - Note que integrando a equação acima, obtemos a função de distribuição acumulada (CDF)
- Propriedades da função de distribuição acumulada (CDF):
  - $F(0) = 0$
  - $\int_0^\infty f(t)dt = 1$, ou seja, a soma das probabilidades de todos os valores possíveis de *T* (espaço amostral) dever ser igual a 1



- $0 \le F(t) \le 1$



- $F(t)$ é monotônica crescente (veja a seguinte figura)

- Probabilidade associada a intervalos:
  - Como

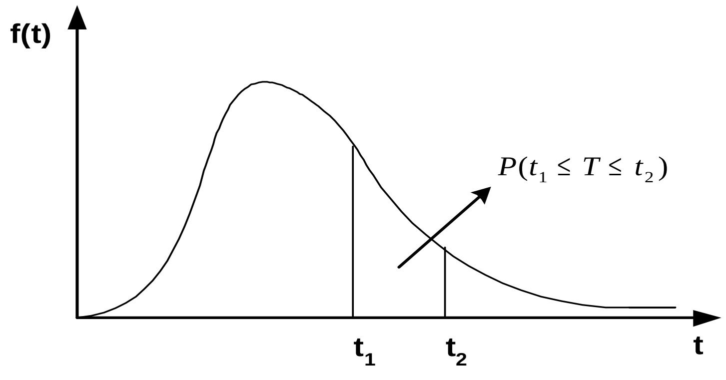
$$P(t_1 \le T \le t_2) = F(t_2) - F(t_1) = P(T \le t_2) - P(T \le t_1)$$

tem-se que

$$P(t_2 \le T \le t_1) = \int_0^{t_2} f(v)dv - \int_0^{t_1} f(v)dv = \int_{t_1}^{t_2} f(v)dv$$

é a probabilidade de que T assuma algum valor dentro do intervalo $[t_1, t_2]$

  - Note que $P(t_1 \le T \le t_2)$ corresponde a área sob a curva da função de



densidade de probabilidade $f(t)$ entre $T = t_1$ e $T = t_2$ (veja a figura que segue)

- Em geral:
  - A PDF de uma v.a. contínua, ou a PMF de uma v.a. discreta fornecem a forma da distribuição de probabilidade
  - A CDF, por outro lado, fornece a probabilidade acumulada $F(t) = P(T \leq t)$
- Exemplo 11:
  - Considere a v.a. T representando o tempo de falha de um certo equipamento com a seguinte função de densidade de probabilidade (PDF):

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{a} \ ; 0 < T \leq 6 \\ 0 \ ; \mathit{caso\ contrario} \end{cases}$$

  - Valor do parâmetro a:

$$\int_0^6 \frac{t^2}{a} dt = 1$$

$$\frac{1}{a}\int_0^6 t^2 dt = 1$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^6 = 1$$

logo $a = 72$

  - A probabilidade de o equipamento falhar entre $T = 1\,hora$ e $T = 3\,horas$:

$$P(1 \leq T \leq 3) = F(3) - F(1) = \int_0^3 \frac{t^2}{a} dt - \int_0^1 \frac{t^2}{a} dt$$

$$P(1 \leq T \leq 3) = 0.12$$

9. Média e Variância de Variáveis Aleatórias

- Sabemos que uma v.a. discreta ou contínua é completamente caracterizada através de sua função de probabilidade mássica (PMF) no caso discreto, ou da função de densidade de probabilidade (PDF) no caso contínuo

- Outras características importantes em confiabilidade e risco podem ser obtidas a partir da PDF ou PMF de variáveis aleatórias, como medidas de posição central e dispersão
- *Valor Esperado ou Média*:
  - Para uma v.a. discreta *X* que assume valores x_i com probabilidade $P(x_i)$, o valor esperado ou média de *X*, $E(x)$, é dado por:

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i)$$

    onde o somatório é realizado para todos os valores possíveis de *X*. A média de *X* é também às vezes denota por μ

  - Para uma v.a. contínua *T* com densidade $f(t)$, a média $E(T)$ é dada por:

$$E(T) = \int_0^\infty t f(t)dt$$

- *Variância*:
  - É uma medida de dispersão ou variação de uma v.a. em torno de sua média
  - Para uma v.a. discreta *X*, a *variância* denotada por $Var(X)$ ou $\sigma^2(X)$ é dada por:

$$Var(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i)$$

  - Para uma v.a. contínua *T* com PDF $f(t)$, a variância denotada por $Var(T)$ ou $\sigma^2(T)$ é dada por:

$$Var(T) = \int_0^\infty (t - \mu)^2 f(t)dt$$

- *Desvio Padrão*: corresponde a raiz quadrada da variância

$$\sigma(T) = \sqrt{Var(T)}$$

- Álgebra para valores médios:
  - As seguintes regras são muito úteis em confiabilidade, e são aplicáveis tanto para v.a. contínuas ou discretas:
    - $E(aX) = aE(X)$, onde *a* é uma constante
    - $E(a) = a$, onde *a* é uma constante
    - $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
    - $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$, se *X* e *Y* são v.a. independentes